

多分量到单分量可用 EMD 分解的条件及判据*

徐冠雷^{1,3} 王孝通^{1,3} 徐晓刚^{2,3} 秦绪佳⁴ 朱涛^{1,3}

海军大连舰艇学院 1. 航海系; 2. 装备系统与自动化系; 3. 光电技术研究所, 大连 116018; 4. 浙江工业大学软件学院, 杭州 310032

摘要 基于数据时域局部特征的 EMD 分解算法可把复杂的数据分解成有限、少量几个内蕴模式函数分量, 是一种数据驱动的自适应时频分析方法. 文中将 Huang 的 EMD 分解定性为从多分量信号到单分量信号的分解算法, 并给出了多分量到单分量可用 EMD 分解的条件, 而且通过建立二级极值点结构, 给出了从多分量到单分量用 EMD 分解的极值点判断准则. 通过大量实验, 验证了可分解条件及判据的合理性.

关键词 EMD 分解 局域波 内蕴模式函数分量(IMF) 多分量 单分量 AFDE 条件

自然界中的信号可分为单分量和多分量信号, 单分量信号每个时刻只有一个瞬时频率, 多分量信号每个时刻有多个瞬时频率^[1-4], 多分量信号由单分量信号构成, 即 $f(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) e^{j\phi_i(t)}$, 其中 $a(t)$, $\phi_i(t)$ 分别为幅值和相位, 这类信号在通信、雷达、声纳等工程中应用广泛. Cohen 以时频平面能量集中的程度作为单分量的评判标准^[1], 但没有给出判断一个信号是单分量还是多分量的精确规则, 不过对于单分量信号和多分量信号的构造却具有重要参考价值. 有关单分量和多分量其他观点还可参考文献[3,4]. 然而, 关于单分量信号和多分量信号仍然没有统一的严格定义和准确的判断准则.

Fourier 变换及其相关功率谱的谱线表示同一频率的周期信号, 分布整个时间域, 称为全域波(global wave). 短时 Fourier 变换、小波分析、Wigner-Ville 分布等在一定程度上描述了非平稳信号的时变性, 但仍属于全域波分析. 用 EMD 分解算法得到的 Hilbert 时频谱不同于传统的功率谱, 其属于局域波范畴, 是非平稳非线性数据时频分析的一次突破, 称之为局域波分析(local wave analysis)^[5]. 局域波时频分析算法是基于数据时域局部特

征的, 它可把非平稳非线性数据分解成有限、少量内蕴模式函数分量(intrinsic mode functions, IMF), EMD 分解算法已经在噪声去除^[6]、海洋^[7]和医学^[8]等领域取得了很好的应用. 但是, 我们发现, EMD 分解算法并非对各种信号都能取得很好的分解效果, 本文通过分析证明: EMD 是从多分量到单分量信号的一种分解方法, 并给出了多分量信号可用 EMD 分解的条件, 以及多分量信号能否进行 EMD 分解的判据.

1 EMD 分解与多分量到单分量分解的关系

EMD 对多数多分量信号的分解能够给出物理意义, 但对于某些多分量信号, EMD 分解获得的时频分布与实际时频分布不一致, 会出现一个 IMF 包含两个单分量信号, 或者由两个单分量构成的信号分解成完全不同的两个单分量信号. 图 1(b)~(d), (f)~(h)是多种分解方法对图 1(a), (e)给出的分解结果, 显然, 图 1(b), (f)中 EMD 分解给出的结果没有物理意义, 而传统的分析方法虽然存在交叉项、时频聚集性差等缺陷(见图 1(c), (d), (g), (h)), 但大体可区分两个单分量信号.

从图 1 的实验结果可以发现, IMF 信号并不是

2005-12-22 收稿, 2006-04-07 收修改稿

* 国家自然科学基金(批准号: 60473141)和浙江省自然科学基金(批准号: Y104341)资助项目

E-mail: xgl_86@163.com

在任何情况下都有物理意义, Huang 没有从单分量的角度来描述^[5], 但认为 IMF 的本质特征是在每个时刻只有一个瞬时频率, Huang 的观点并不完全正确(如图 1(b), (f)). 然而在一定条件下, IMF 信号求得瞬时频率及其瞬时相位是具有物理意义的, 并且给出了实例^[5], 文献[3, 4]通过采用相位微分方法求解的瞬时频率, 与 EMD 对 IMF 瞬时频率的求解方法一致. 因此, 可以认为具有物理意义的 IMF 就是单分量信号.

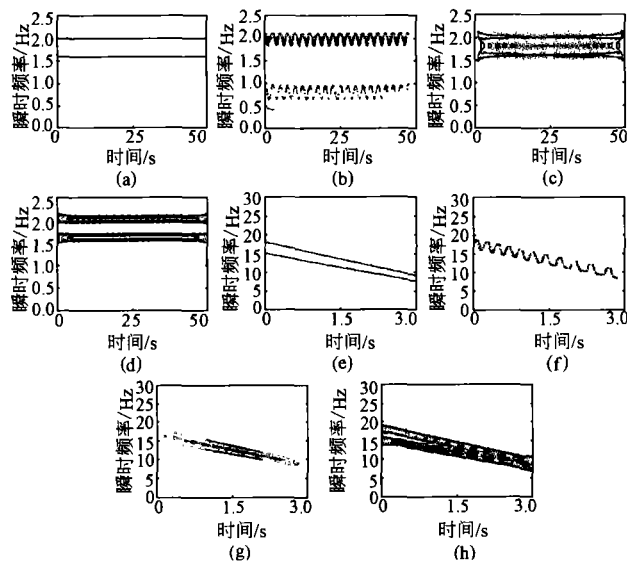


图 1 不同时频分析方法信号时频分析比较

(a) 信号 1 理想时频; (b) 信号 1 的 Hilbert-Huang 时频分析结果; (c) 信号 1 的 Wigner-Ville 时频分析结果; (d) 信号 1 的短时 Fourier 变换时频分析结果; (e) 信号 2 理想时频; (f) 信号 2 的 Hilbert-Huang 时频分析结果; (g) 信号 2 的 Wigner-Ville 时频分析结果; (h) 信号 2 的短时 Fourier 变换时频分析结果

所以我们可以得出结论: 在一定条件下, EMD 分解得到的具有物理意义的 IMF 是单分量信号, EMD 分解是多分量信号到单分量信号的分解工具, 或单分量信号满足 IMF^[5], 但是, IMF 并不一定是单分量信号.

2 EMD 分解的 AFDE 条件及其判断准则

通过上述分析, EMD 分解方法显示了分析非平稳非线性信号的有效性和局限性, 本节将给出 EMD 方法的有效应用范围. 为描述方便, 先给出几个定义, 然后给出 EMD 分解的 AFDE 条件和判断

准则.

2.1 多分量信号中单分量信号的几乎完全分解

设能量有限、带宽为 B 和时宽为 T 的多分量信号 $f(t)$, 它由 n 个单分量信号 $f_i(t)$ 构成, 即 $f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)$, EMD 分解^[5]得到 n 个内蕴模式函数分量 $imf_i(t)$, $f_i(t)$ 与 $imf_i(t)$ 之间存在偏差, 则标准均方误差 $NMSE_i$ 为

$$NMSE_i = \frac{\int_0^T |f_i(t) - imf_i(t)|^2 dt}{\int_0^T |f_i(t)|^2 dt}, \quad (1)$$

定义总的标准均方误差 $NMSE$ 为

$$NMSE = \max(NMSE_i, i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

EMD 分解是一种能量分解, 由于正负幅度的影响可能出现 $NMSE > 1$ 的情况, 为了描述方便, 规定 $NMSE$ 的上限为 1, 若大于 1 置为 1.

从(1)和(2)式可知, 如果所有 $NMSE_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 为零, 即 $NMSE$ 为零, EMD 分解得到的分量信号与构成信号的单分量信号完全吻合, 否则, $NMSE$ 大, 则信号分解后的误差大.

定义 1 由 n 个单分量信号 $f_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 构成的多分量信号 $f(t)$, 其能量有限、带宽为 B 和时宽为 T , 当 $NMSE$ 等于 0 时, 称该信号 $f(t)$ 可用 EMD 完全分解.

定义 2 由 n 个单分量信号 $f_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 构成的多分量信号 $f(t)$, 其能量有限、带宽为 B 和时宽为 T , 当 $NMSE$ 小于等于某个小的阈值 $thrd$ 时, 称该信号 $f(t)$ 可用 EMD 几乎完全分解.

通过大量实验, 一般 $thrd$ 在 1%—2% 内取值.

2.2 几种典型信号的分解与时频分布

设两个单分量信号 $s_1(t) = a_1 e^{j \int_{t_0}^t f_{1,is}(t) dt}$ 和 $s_2(t) = a_2 e^{j \int_{t_0}^t f_{2,is}(t) dt}$, 不失一般性, 两个信号的 a_1, a_2 幅度为常数, $f_{1,is}$ 和 $f_{2,is}$ 分别为两个信号的瞬时频率, 这里“is”表示瞬时. 以两个单分量信号的瞬时频率之比 $f_{1,is}/f_{2,is}$ 和幅度之比 a_1/a_2 为平面坐标, 以 $NMSE$ 为纵坐标, 建立三维坐标系, 如图 2 所示. 以 3 种

典型的平稳信号(恒定频率)、线性调频信号和二次多项式调频信号为例加以说明,由两个平稳单分量信号构成的多分量信号的分解结果,如图2(a)所示,

由两个线性调频单分量信号构成的多分量信号的分解结果,如图2(b)所示,而图2(c)是由两个二次调频单分量信号构成的多分量信号的分解结果。

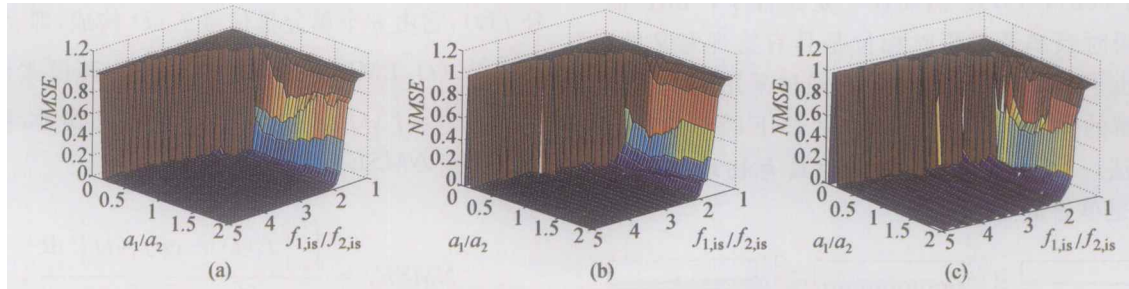


图2 几种典型信号下两个单分量信号 EMD 分解的 NMSE

(a) 两个平稳单分量信号分解的 NMSE; (b) 两个线性调频单分量信号分解的 NMSE;
(c) 两个二次多项式调频单分量信号分解的 NMSE

由图2可知,当两个信号瞬时频率为2倍关系时,NMSE明显存在分界线,即当一个信号的瞬时频率大于等于另一信号的2倍时,NMSE几乎可以忽略不计,两个信号用EMD几乎完全分解;而且随着频率倍数的增加,高频信号的瞬时幅度可以不断地减小,只要满足 $a_1 f_{1,is} \geq a_2 f_{2,is}$ 关系,两个信号构成的多分量信号同样可以用EMD几乎完全分解。所以,一个多分量信号用EMD完全分解受 $f_{1,is}/f_{2,is}$ 和 a_1/a_2 范围限制。

2.3 EMD 分解的 AFDE 条件

为了讨论方便,不失一般性,以两个单分量构成的多分量信号加以讨论,至于多个单分量构成多分量信号,只需要将AFDE条件和极值点准则依次应用到瞬时频率邻近的两个单分量即可。

AFDE条件:由两个单分量构成的多分量信号可以用EMD几乎完全分解的条件(almost fully decomposed by EMD,简称AFDE条件):(1)其中一个单分量信号的瞬时频率不小于另一个单分量信号瞬时频率的2倍,即 $f_{1,is} \geq 2f_{2,is}$;(2)两个单分量信号瞬时频率与幅度之积满足 $a_1 f_{1,is} \geq a_2 f_{2,is}$,其中 a_1 和 a_2 分别表示两个单分量信号的幅度。其中条件(1)是必要条件,联合条件(1)和条件(2)构成充分条件。

2.4 多分量信号可用 EMD 分解的判断准则

2.4.1 信号的多级极值点表示 由 n 个单分量信号 $f_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$)构成的多分量信号 $f(t)=$

$\sum_{i=1}^n f_i(t)$,其能量有限、带宽为 B 和时宽为 T ,由 $f(t)$ 所有局部极大值点构成极大值点集,即

$$S_{\max} = \{s_{\max,r} \mid s_{\max,r} = f(t_r) \cap f'(t_r) = 0 \cap f''(t_r) < 0\}_{t_r \in T}.$$

由所有局部极小值点构成极小值点集,即

$$S_{\min} = \{s_{\min,l} \mid s_{\min,l} = f(t_l) \cap f'(t_l) = 0 \cap f''(t_l) > 0\}_{t_l \in T},$$

其中 $S_{\max}$ 和 $S_{\min}$ 称为一级极值点集。

从 $S_{\max}$ 中寻找局部极大值点构成极大极大点集,即

$$S_{\max \max} = \{s_{\max \max,r} \mid s_{\max \max,r} = s_{\max,r} \cap s_{\max,r} > s_{\max,r-1} \cap s_{\max,r} > s_{\max,r+1}\},$$

从所有局部极小值点构成极大极小点集,即

$$S_{\max \min} = \{s_{\max \min,r} \mid s_{\max \min,r} = s_{\max,r} \cap s_{\max,r} < s_{\max,r-1} \cap s_{\max,r} < s_{\max,r+1}\},$$

同理,从 $S_{\min}$ 中寻找局部极大值点构成极小极大点集,即

$$S_{\min \max} = \{s_{\min \max,l} \mid s_{\min \max,l} = s_{\min,l} \cap s_{\min,l} > s_{\min,l-1} \cap s_{\min,l} > s_{\min,l+1}\},$$

从所有局部极小值点构成极小极小点集, 即

$$S_{\min \min} = \{s_{\min \min, l} | s_{\min \min, l} = s_{\min, l} \cap s_{\min, l} < s_{\min, l-1} \cap s_{\min, l} < s_{\min, l+1}\},$$

其中 $S_{\max \max}$, $S_{\max \min}$, $S_{\min \max}$ 和 $S_{\min \min}$ 称为二级极值点集。

例如, 两个单分量信号构成的信号 $y = \sin(t) + \sin(6t + \pi/6)$, 其极值点分布图如图 3 所示。

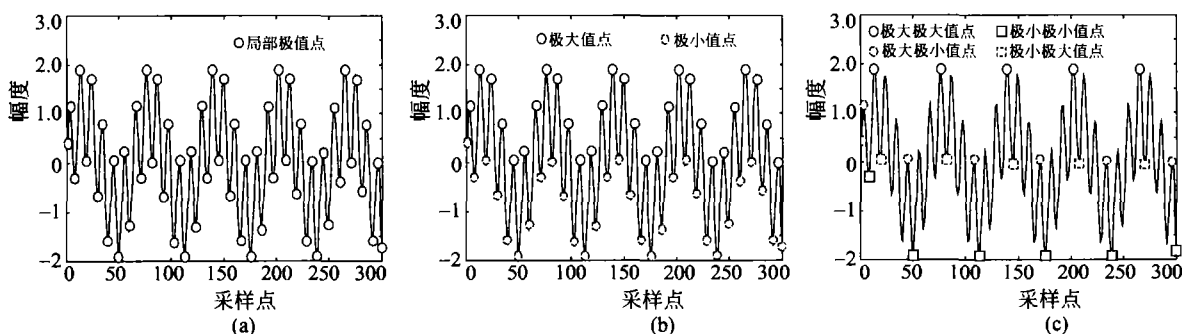


图 3 信号 $y = \sin(t) + \sin(6t + \pi/6)$ 的多级极值点结构

(a) 极值点; (b) 一级极值点; (c) 二级极值点

2.4.2 多分量信号可用 EMD 分解的判断准则

AFDE 条件在工程中应用比较困难, 现在给出实用的判断准则, 由于其涉及到多级极值点分布与相邻点的个数等, 称之为极值点准则。

判断多分量信号可用 EMD 几乎完全分解的极值点准则:

条件 1 从二级极值点集中任选 $\forall s_{\max \max, r} \in S_{\max \max}$, 总存在 $\exists s_{\min \max, l} \in S_{\min \max}$ 与其对应, 则称 $\langle s_{\max \max, r}, s_{\min \max, l} \rangle$ 为极值点对 (Extrema Couple, EC), 且它们之间不存在一级极值点。

同样, 从二级极值点集中任选 $\forall s_{\max \min, r} \in S_{\max \min}$, 总存在 $\exists s_{\min \min, l} \in S_{\min \min}$ 与其对应, 构成极值点对 $\langle s_{\max \min, r}, s_{\min \min, l} \rangle$, 且它们之间不存在一级极值点。

条件 2 从二级极值点集中任选 $\forall s_{\max \max, r} \in S_{\max \max}$, 总存在 $\exists s_{\min \min, l} \in S_{\min \min}$ 与其对应, 构成极值点对 $\langle s_{\max \max, r}, s_{\min \min, l} \rangle$, 且它们之间不存在一级极值点。

同样, 从二级极值点集中 $\forall s_{\max \min, r} \in S_{\max \min}$, 总存在 $\exists s_{\min \max, l} \in S_{\min \max}$ 与其对应, 构成极值点对 $\langle s_{\max \min, r}, s_{\min \max, l} \rangle$, 且它们之间不存在一级极值点。

只满足条件 1, 则由两个单分量构成的多分量

信号可以用 EMD 几乎完全分解;

同时满足条件 1、条件 2, 且满足条件 1 的极值点对数目 (The number of EC, 简称 NEC) 大于等于满足条件 2 的 NEC, 则由两个单分量构成的多分量信号可以用 EMD 几乎完全分解;

只满足条件 2, 则由两个单分量构成的多分量信号不可以用 EMD 几乎完全分解。

特别地, 当满足条件 1 的 NEC 等于满足条件 2 的 NEC (或最多相差一对), 且交叉分布, 则两个单分量信号瞬时频率是二倍频的关系。一般情况, 在两个条件同时存在的情况下, 当满足条件 1 的 NEC 越少则越倾向于不能够分解, 反之, 越倾向于能够分解。

当瞬时频率之比变化时, 造成极值点分布的变化, 极值点的分布情况直接影响 EMD 分解条件。下面就以 3 种典型信号 EMD 分解为例, 说明这种变化规律和极值点判据准则的有效性。

不失一般性, 设任意两个单分量信号在时频平面内没有交叉, 其中 $f_{1, is}/f_{2, is}$ 是两个单分量信号的瞬时频率之比, 表 1 给出 10000 个采样点的数据, 并列出了由两个平稳信号、两个线性调频信号和两个二次多项式调频信号构成的多分量信号 EMD 分解情况。

表1 两个不同单分量信号极值点对与瞬时频率之比和 NMSE 的关系(部分数据)

		瞬时频率之比 $f_{1,is}/f_{2,is}$									
		1.0256	1.4815	1.6667	1.9048	2.0000	2.1053	2.3529	2.6667	3.0769	10.0000
两个平稳单分量信号	NEC ₁	0	0	79	179	197	188	168	149	128	40
	NEC ₂	9	129	159	189	198	167	108	49	0	0
	NMSE	0.9999	0.4353	0.0696	0.0217	0.0034	0.0024	0.0011	0.0007	0.0003	0.0000
两个线性调频单分量信号	NEC ₁	0	1	58	124	148	141	126	111	97	30
	NEC ₂	7	95	118	141	148	125	79	37	0	0
	NMSE	1.0000	0.4546	0.0778	0.0188	0.0108	0.0087	0.0008	0.0010	0.0001	0.0000
两个二次调频单分量信号	NEC ₁	0	0	52	112	87	125	112	99	86	26
	NEC ₂	6	86	105	125	88	112	73	32	0	0
	NMSE	1.0000	0.4676	0.0775	0.0074	0.0019	0.0018	0.0008	0.0011	0.0003	0.0060

从表1看出, NEC₁ 随着瞬时频率之比的增加而相对增加, NEC₂ 随着瞬时频率之比的减少而相对减少, 且在瞬时频率之比为2时, 则两者相等(或最多相差一个), 此时, 由两个单分量信号构成的多分量信号处于几乎完全分解的临界状态. 对于 NEC₁ 大于等于 NEC₂ 所有情况, 多分量信号均可以用 EMD 几乎完全分解. 而只满足条件1中的极值点情况时可以用 EMD 几乎完全分解, 而只满足条件2中的极值点情况时不能用 EMD 几乎完全分解. 同时可以看出, NMSE 受边界效应^[5,9]的影响会产生一定的波动.

3 结论

本文将 Huang 的 EMD 分解定性为从多分量信号到单分量信号的分解算法, 且找到了这种分解的条件——AFDE 条件, 即单分量信号之间瞬时频率相差一倍或以上且满足间瞬时频率较高信号的幅频乘积不小于瞬时频率较低信号的幅频乘积. 在此基础上, 给出了实用的判断准则——极值点准则, 为应用 EMD 算法提供了数值判据. 通过大量实验, 证实了本文观点和结论. 文中论述均以两个信号为例, 由于 EMD 分解是由高频到低频依次分解的, 因此 AFDE 条件和判断准则同样适用由多个单分量构成的多分量信号(个数大于2).

参 考 文 献

- 1 Cohen L. What is a multicomponent signal. IEEE Proc, IC-ASSP 1992, 5: V113-V116
- 2 Loughlin P J, Davidson K L. Modified Cohen-Lee time-frequency distributions and instantaneous bandwidth of multicomponent signals. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(6): 1153—1165
- 3 Boashash B. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal-Part 1: Fundamentals. IEEE Proc, 1992, 80(4): 539—568
- 4 Boashash B. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal-Part 2: Algorithms and applications. IEEE Proc, 1992, 80(4): 540—568
- 5 Norden E Huang, Zheng Shen, Steven R Long, et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for non-linear non-stationary time series analysis. Proc R Soc London Ser A, 1998, 454: 903—995
- 6 Han C, Guo H, Wang C, et al. A novel method to reduce speckle in SAR images. International Journal of Remote Sensing, 2002, 23(23): 5095-5101
- 7 Gloersen P, Huang N. Comparison of interannual intrinsic modes in hemispheric sea ice covers and other geophysical parameters. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2003, 41(5): 1062—1074
- 8 Liang H L, Lin Q H, Chen J D Z. Application of the empirical mode decomposition to the analysis of esophageal manometric data in gastroesophageal reflux disease. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 2005, 52(10): 1692—1701
- 9 张郁山, 梁建文, 胡聿贤. 应用自回归模型处理 EMD 方法中的边界问题. 自然科学进展, 2003, 13(10): 1054—1059

1 Cohen L. What is a multicomponent signal. IEEE Proc, IC-